Δευτέρα 6/5/2019

Άσκηση Δ.ο. αν $\mu\kappa\delta(m,n)=1$ τότε $Z_{mn} \simeq Z_m \times Z_n$

$$Z_{mn} \xrightarrow{\varphi} Z_m \times Z_n$$
$$\varphi([a]_{mn}) = ([a]_m, [a]_n)$$

Καλά ορισμένη. Έστω $[a]_{mn} = [b]_{mn} \Leftrightarrow a \equiv b \mod mn \Leftrightarrow a-b = kmn$
$\Leftrightarrow b = a-kmn$

$\varphi([b]_{mn}) = ([b]_m, [b]_n) = ([a-kmn]_m, [a-kmn]_n) = ([a]_m, [a]_n) = \varphi([a]_{mn})$

Άρα η φ καλά ορισμένη

(φ ομομορφισμός ομάδων) $\varphi([a]_{mn}) + \varphi([b]_{mn}) = \varphi([a+b]_{mn}) =$
$= ([a+b]_m, [a+b]_n) = ([a]_m + [b]_m, [a]_n + [b]_n) = ([a]_m, [a]_n) + ([b]_m, [b]_n)$
$= \varphi([a]_{mn}) + \varphi([b]_{mn})$ Άρα φ ομομορφισμός ομάδων

$Ker\varphi \subseteq \{[0]_{mn}\}$
$\{[0]_{mn}\} \subseteq Ker\varphi$ αφού $\varphi([0]_{mn}) = ([0]_m, [0]_n)$ Άρα $Ker\varphi = \{[0]_{mn}\}$

Άρα φ 1-1

(φ επί) Έστω $([a]_m, [b]_n) \in Z_m \times Z_n$

$$\varphi([x]_{mn}) = ([a]_m, [b]_n)$$
$$([x]_m, [x]_n) = ([a]_m, [b]_n)$$

$[x]_m = [a]_m$ $\quad x \equiv a \mod m$
$[x]_n = [b]_n$ $\quad x \equiv b \mod n$
$\quad \mu\kappa\delta(m,n)=1$ } ΚΙΝΕΖΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

	M_i	b_i
a	n	λ
b	m	k

$M = mn$

$b_1 n \equiv 1 \mod m$ $\quad$ $\mu.\kappa.\delta(m,n)=1$
$b_2 m \equiv 1 \mod n$ $\quad$ $\Rightarrow 1 = \kappa m + \lambda n$
$x \equiv an\lambda + bm\kappa \mod mn$

(φ επι). Έστω $([a]_m, [b]_n) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$
Τότε $\varphi([an\lambda + bm\kappa]_{mn}) = ([an\lambda + bm\kappa]_m, [an\lambda + bm\kappa]_n) =$
$= ([an\lambda]_m, [bm\kappa]_n) = ([a(1-\kappa m)]_m, [b(1-\lambda n)]_n) =$
$= ([a - a\kappa m]_m, [b - b\lambda n]_n) = ([a]_m, [b]_n).$

$$\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \quad \text{αν} \quad \mu.\kappa.\delta(m,n)=1$$

$$o([1]_m, [1]_n) = \text{Ε.Κ.Π}(o([1]_m), o([1]_n)) = \text{Ε.Κ.Π}(m,n) = \frac{m \cdot n}{\mu.\kappa.\delta(m,n)}$$

$$= \frac{m \cdot n}{1} = m \cdot n$$

Άρα $o([1]_m, [1]_n) = mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| \Rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ κυκλική ομάδα τάξης mn.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

Άσκηση. Έστω $H \trianglelefteq G$ με $(G:H) = m$
Δείξτε ότι αν $a \in G$ τότε $a^m \in H$.

$|G/H| = m$
$aH \in G/H \Rightarrow o(aH) \mid |G/H| = m$ Lagrange $\quad (aH)^m = eH$

$\underbrace{(aH)(aH)\dots(aH)}_{m\text{-φορές}} = H \Rightarrow (a \cdot a \cdot a \dots a)H = H \Rightarrow a^m H = H \Rightarrow$
$\Rightarrow a^m \underset{H}{\underset{\text{̈}}{e}} \in a^m H = H \Rightarrow a^m \in H$

Άσκηση 2η. Έστω $H \trianglelefteq G$ με $(G:H) = m$. Δείξτε ότι αν $a \in G$ με $\mu.\kappa.\delta(\underset{n}{o(a)}, m) = 1$ τότε $a \in H$

$a^m \in H$
$o(a) = n \Rightarrow a^n = e \in H$
$\mu.\kappa.\delta(m,n)=1$ Ευκλείδη $1 = \kappa m + \lambda n$

$\Rightarrow a = a^1 = a^{\kappa m + \lambda n} = a^{\kappa m} \cdot a^{\lambda n} = (a^m)^\kappa (a^n)^\lambda \in H$
$a^m \in H \Rightarrow (a^m)^\kappa \in H$
$a^n \in H \Rightarrow (a^n)^\lambda \in H$

Ασκηση 7 #7. Δ.ό η εναλλάσσουσα ομάδα A_4 έχει υποομάδες τάξης 1,2,3,4 και 12 αλλά δεν έχει υποομάδες τάξης 6.

$$A_4 = \{ I, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}.$$

Υποομάδα τάξης 1: $\{I\}$

Υποομάδα τάξης 2: $\{I, (1,2)(3,4)\}$, $\{I, (1,3)(2,4)\}$, $\{I, (1,4)(2,3)\}$.

Υποομάδα τάξης 3: $\{I, (1,2,3), (1,3,2)\}$, $\{I, (1,2,4), (1,4,2)\}$, $\{I, (1,3,4), (1,4,3)\}$, $\{I, (2,3,4), (2,4,3)\}$

Υποομάδα τάξης 4: $\{I, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} = V_4$ ομάδα του Κλάιν

Υποομάδα τάξης 12. A_4.

Έστω H υποομάδα τάξης 6. $(A_4 : H) = |A_4| / |H| = 12/6 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} H \leq A_4 \\ \text{και } (A_4 : H) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow H \triangleleft A_4$$

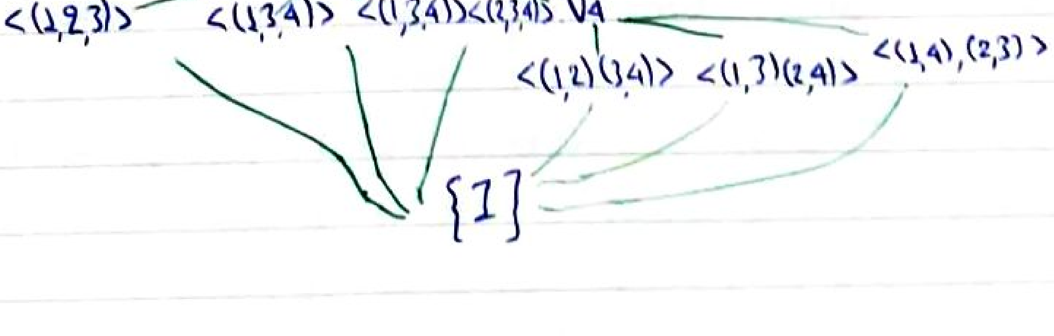
$I \in H$

$$\left.\begin{array}{l} o((1,2,3)) = 3 \\ (A_4 : H) = 2 \\ \text{μκδ}(2,3) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,2,3) \in H$$

$(\kappa, \lambda, \mu) \in H$

$6 = |H| \geq 9$ Άτοπο. Άρα η A_4 δεν έχει υποομάδα τάξης 6

Βρείτε το διάγραμμα Hasse της A_4.

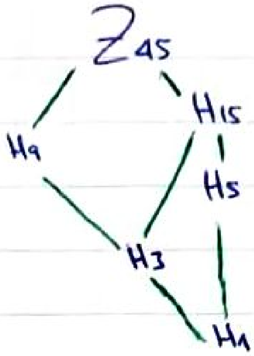


Ασκηση 1 #7 Βρείτε το διάγραμμα Hasse της $\mathbb{Z}_{45}$.

Υποομάδες της $\mathbb{Z}_{45} = \langle [1]_{45} \rangle$ κυκλική.

Έστω $H \le \mathbb{Z}_{45} \Rightarrow |H| \mid 45 \Rightarrow |H| \in \{1,3,5,9,15,45\}$ $\quad \tau(45)=\tau(5\cdot 3^2) = (1+1)(2+1)=6$

- $H_1 = \langle [0]_{45} \rangle$ $\quad$ · $H_3 = \langle [15] \rangle = \{[0],[15],[30]\}$
- $H_5 = \langle [9] \rangle = \{[0],[9],[18],[27],[36]\}$
- $H_9 = \langle [5] \rangle = \{[0],[5],[10],[15],[20],[25],[30],[35],[40]\}$
- $H_{15} = \langle [3] \rangle = \{[0],[3],[6],[9],[12],[15],[18],[21],[24],[27],[30],[33],[36],[39],[42]\}$
- $H_{45} = \mathbb{Z}_{45}$.



Ασκηση 1 #8 Έστω G ομάδα και H μια πεπερασμένη υποομάδα της G. με την ιδιότητα η H είναι η μοναδική υποομάδα της G με τάξη $|H| = \#H$. Δείξτε ότι η $H \lhd G$.

$H \lhd G \Leftrightarrow gH = Hg \;\forall g \in G.$

$\Leftrightarrow gHg^{-1} = H \;\forall g\in G \Leftrightarrow gHg^{-1} \subseteq H$

Ισχυριζόμαστε ότι $gHg^{-1} \le G$

$geg^{-1} \in gHg^{-1} \Rightarrow gHg^{-1} \neq \emptyset$ αφού $e \in H$ | Έστω $a,b \in gHg^{-1} \Rightarrow a = gh_1g^{-1},\; b = gh_2g^{-1}$

$ab^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}(g^{-1})^{-1}h_2^{-1}g^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$

Άρα $gHg^{-1} \le G$

$H \xrightarrow{f} gHg^{-1}$ $\quad f(h_1) = f(h_2) \Rightarrow gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1} \Rightarrow h_1g^{-1} = h_2g^{-1} \Rightarrow h_1 = h_2$ f 1-1

$f(h) = ghg^{-1}$ $\quad f(h) = ghg^{-1}$ $\quad f$ επί

$|gHg^{-1}| = |H|$

Συνεπώς η gHg^{-1} είναι υποομάδα της G και $|gHg^{-1}| = |H|$. Έχουμε όμως ότι η H

Είναι η μοναδική υποομάδα της G με $|H|$ στοιχεία $\Rightarrow gHg^{-1} = H \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2 #8</u> $H \trianglelefteq G$ $a, b \in G$ αν $ab \in H \Rightarrow ba \in H$.

$ab \in H \Rightarrow ab = h \in H \Rightarrow a = hb^{-1} \in Hb^{-1} = b^{-1}H \Rightarrow a \in b^{-1} \cdot H \Rightarrow a = b^{-1} h_1$
$\Rightarrow ba = bb^{-1} \cdot h_1 = h_1 \Rightarrow ba \in H$.